

折线模糊神经网络对 Choquet 可积函数的泛逼近性

何春梅^{1,2}

(1 华东交通大学 信息学院, 江西 南昌 330013; 2 南京理工大学 计算机科学与技术学院, 江苏 南京 210094)

摘 要: 首先定义了 Choquet 积分模的概念, 然后分析了折线模糊神经网络在 Choquet 积分模意义下对模糊值函数的泛逼近性, 证明了当模糊值函数满足相容性时, 折线模糊神经网络能够以任意精度逼近该 Choquet 可积模糊值函数。

关键词: 折线模糊神经网络; 泛逼近; Choquet 积分; 模糊测度

中图分类号: TP183

文献标识码: A

文章编号: 1000-7180(2013)01-0032-05

Approximation of Polygonal Fuzzy Neural Networks for Choquet Integrable Fuzzy Functions

HE Chun-mei^{1,2}

(1 School of Information Engineering, East China Jiaotong University, Nanchang 330013, China;

2 College of Computer Science and Technology, NUST, Nanjing 210094, China)

Abstract: First the Choquet integral norms in sub-additive fuzzy measure are introduced in this paper. Then the universal approximation of polygonal fuzzy neural networks for fuzzy valued functions in sense of Choquet integral norm is analyzed. We show that the polygonal fuzzy neural networks are pan-approximators for fuzzy-valued functions in sense of Choquet integral norms with respect to fuzzy measure when the fuzzy-valued functions are compatible.

Key words: polygonal fuzzy neural network; universal approximation; Choquet integral; fuzzy measure

1 引言

模糊神经网络 (Fuzzy Neural Networks, FNN) 能应用到实际中的前提在于其泛逼近能力, 而且 FNN 的学习能力与其逼近能力密切相关, 因此研究 FNN 对连续或可积模糊函数的泛逼近能力非常重要. 国内外很多学者对这一课题进行研究, 并取得了很多重要的研究成果^[1-7]. 文献[5, 6]研究了 FNN 对连续模糊函数的泛逼近性, 文献[7]研究了折线 FNN 在 Lebesgue 测度中的 K-积分模意义下对可积模糊函数的泛逼近性. 但是由于测度和积分模的种类多种多样, 比如在模糊测度中的 Choquet^[8-9]积分模和 Henstock 积分模等, 在不同的测度空间的不同积分模意义下折线 FNN 的泛逼近性

会得出不同的结果. 本文对折线 FNN 在模糊测度中的 Choquet 积分模意义下的泛逼近性进行研究. 本文总假设所涉及的模糊测度是有限连续的模糊测度.

2 模糊数和折线模糊数

我们假设 N 是全体自然数集合, R 代表实数集合. X 是一个非空集合.

定义 1 $\forall A, B \in R^n$, A 和 B 之间的 Hausdorff 距离 $d_H(A, B)$ 定义如下^[5]:

$$d_H(A, B) = \max \left\{ \bigvee_{x \in A} \bigwedge_{y \in B} (\|x - y\|), \bigvee_{y \in B} \bigwedge_{x \in A} (\|x - y\|) \right\}.$$

当 $A = [a, b]$, $B = [c, d]$ 时, $d_H(A, B) = |a - c|$

收稿日期: 2012-05-15; **修回日期:** 2012-06-07

基金项目: 国家自然科学基金(61163040); 江西省教育厅项目(GJJ12323); 华东交通大学校立项目(09102018)

$\forall |b-d|$.

定义 2 令 $\tilde{A}:R \rightarrow [0,1]$ 是一个映射,如果 $\tilde{A}$ 满足如下两条,则 $\tilde{A}$ 称之为一个模糊数.

(1) $\ker(\tilde{A}) = \{x \in R | \tilde{A}(x) = 1\} \neq \emptyset$;

(2) $\alpha \in (0,1], \tilde{A}_\alpha = [a_\alpha^1, a_\alpha^2]$ 是一个有界区间.

令 $F_0(R)$ 代表实数集上的所有模糊数集合.

$\forall \tilde{A}, \tilde{B} \in F_0(R)$, $\tilde{A}$ 和 $\tilde{B}$ 之间的距离定义为:

$$D(\tilde{A}, \tilde{B}) = \bigvee_{\alpha \in [0,1]} (d_H(\tilde{A}_\alpha, \tilde{B}_\alpha))$$

由文献[5]可知, $(F_0(R), D)$ 是一个完备的距离空间. 令 $F_0^*(R) \subseteq F_0(R)$, 那么 $(F_0^*(R), D)$ 也是一个完备的距离空间.

模糊数在模糊理论中是很重要的,但是模糊算术是非线性且很复杂,这是因为基于 Zadeh 扩展原理的四种模糊算术运算并不满足封闭性. 因此一个重要的问题是如何以近似方式对模糊数进行扩充得到一些满足封闭性的模糊算术. 文献[5]中提出的折线模糊数是现有模糊数的一种逼近,而且基于折线模糊数提出的模糊算术更加简单且具有良好的线性特征. 下面介绍折线模糊数及其模糊算术.

定义 3 对 $\forall \tilde{A} \in F_0(R)$, $n \in N$, $k=1, \dots, n$, 如果存在 $a_0^1 \leq \dots \leq a_n^1 \leq a_n^2 \leq \dots \leq a_0^2 \in R$ 使得 $\forall x \in R$,

$$\tilde{A}(x) = \begin{cases} \frac{\tilde{A}(a_k^1) - \tilde{A}(a_{k-1}^1)}{a_k^1 - a_{k-1}^1} (x - a_{k-1}^1) + \tilde{A}(a_{k-1}^1), & a_k^1 \leq x \leq a_{k-1}^1; \\ 1, & a_n^1 \leq x \leq a_n^2; \\ \frac{\tilde{A}(a_k^2) - \tilde{A}(a_{k-1}^2)}{a_k^2 - a_{k-1}^2} (x - a_{k-1}^2) + \tilde{A}(a_{k-1}^2), & a_k^2 \leq x \leq a_{k-1}^2; \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (1)$$

其中假设 $0/0=0$ 那么 $\tilde{A}$ 称之为一个折线模糊数, 记作 $\tilde{A} = ([a_n^1, a_n^2]; a_0^1, \dots, a_{n-1}^1, a_{n-1}^2, \dots, a_0^2)$. $F_\alpha^n(R)$ 代表所有的折线模糊数集合.

图 1 表示了一个 n -折线模糊数的隶属度函数曲线. 很明显, 一个 n -折线模糊数有有限个点唯一确定, 而且它比模糊数更简单. 特别地, 如果令 $n=2$, 那么 $\tilde{A}$ 是一个三角模糊数; 当 $a_n^1 = a_n^2$, $\tilde{A}$ 变成了一个梯形模糊数.

令 $\tilde{A} = ([a_n^1, a_n^2]; a_0^1, \dots, a_{n-1}^1, a_{n-1}^2, \dots, a_0^2) \in F_\alpha^n(R)$, 则可推出 $\ker(\tilde{A}) = [a_n^1, a_n^2]$, $\tilde{A}_0 = [a_0^1, a_0^2]$, 且有如下两式成立:

$$a_0^1 \leq \dots \leq a_n^1 \leq a_n^2 \leq \dots \leq a_0^2, \quad \forall i=0, 1, \dots, n,$$

$$\tilde{A}_{\frac{1}{n}} = (i\tilde{A}_n)_{\frac{1}{n}} = [a_i^1, a_i^2]$$

对 $\forall \tilde{A} \in F_\alpha^n(R)$, 由定义 3 可以很快得出如下

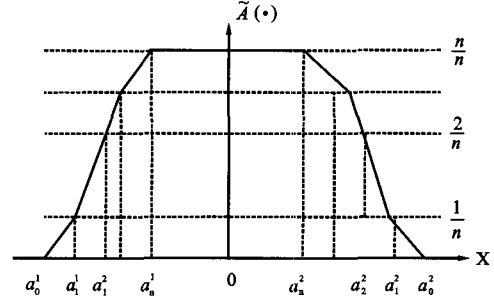


图 1 n -折线模糊数

不等式:

$$0 = \tilde{A}(a_0^1) < \tilde{A}(a_1^1) < \dots < \tilde{A}(a_n^1) = 1 = \tilde{A}(a_n^2) > \dots > \tilde{A}(a_0^2) = 0.$$

定义 4 假设 $n \in N$, 对 $\forall \tilde{A} \in F_\alpha^n(R)$, 折线算子 $Z_n: F_\alpha^n(R) \rightarrow F_\alpha^n(R)$ 定义如下:

$$Z_n(\tilde{A}) = i\tilde{A}_n = ([a_n^1, a_n^2]; a_0^1, \dots, a_{n-1}^1, a_{n-1}^2, \dots, a_0^2).$$

定义 5 令 $\tilde{A}, \tilde{B} \in F_\alpha^n(R)$, $a \in R$. 基于“+”, “-”, “ $\cdot$ ”和单调函数 $\sigma: F_\alpha^n(R) \rightarrow F_\alpha^n(R)$ 的新的扩展原理定义如下^[5-6]:

$$\begin{cases} \tilde{A} + \tilde{B} = ([a_n^1 + b_n^1, a_n^2 + b_n^2]; a_0^1 + b_0^1, \dots, \\ \quad a_{n-1}^1 + b_{n-1}^1, a_{n-1}^2 + b_{n-1}^2, \dots, a_0^2 + b_0^2); \\ \tilde{A} - \tilde{B} = ([a_n^1 - b_n^1, a_n^2 - b_n^2]; a_0^1 - b_0^1, \dots, \\ \quad a_{n-1}^1 - b_{n-1}^1, a_{n-1}^2 - b_{n-1}^2, \dots, a_0^2 - b_0^2); \\ \tilde{A} \cdot \tilde{B} = ([a_n^1 \cdot b_n^1, a_n^2 \cdot b_n^2]; a_0^1 \cdot b_0^1, \dots, \\ \quad a_{n-1}^1 \cdot b_{n-1}^1, a_{n-1}^2 \cdot b_{n-1}^2, \dots, a_0^2 \cdot b_0^2); \\ a \cdot \tilde{A} = ([a \cdot a_n^1, a \cdot a_n^2]; a \cdot a_0^1, \dots, a \cdot a_{n-1}^1, \\ \quad a \cdot a_{n-1}^2, \dots, a \cdot a_0^2); \\ \sigma(\tilde{A}) = \begin{cases} ([\sigma(a_n^1), \sigma(a_n^2)]; \sigma(a_0^1), \dots, \sigma(a_{n-1}^1), \\ \quad \sigma(a_{n-1}^2), \dots, \sigma(a_0^2)), \sigma \text{ is increased}; \\ ([\sigma(a_n^2), \sigma(a_n^1)]; \sigma(a_0^2), \dots, \sigma(a_{n-1}^2), \\ \quad \sigma(a_{n-1}^1), \dots, \sigma(a_0^1)), \sigma \text{ is decreased} \end{cases} \end{cases} \quad (2)$$

其中 $c_i^1, c_i^2 (i=0, \dots, n)$ 由区间乘法确定: $[c_i^1, c_i^2] = [a_i^1, a_i^2] \times [b_i^1, b_i^2]$.

我们很容易推出模糊集合 $F_\alpha^n(R)$ 在上述定义的扩展算术下是封闭的.

对 $\tilde{A}, \tilde{B} \in F_\alpha^n(R)$, 我们知道

$$D(\tilde{A}, \tilde{B}) = \bigvee_{\alpha \in [0,1]} d_H(\tilde{A}_\alpha, \tilde{B}_\alpha) = \bigvee_{i=1}^n (|a_i^1 - b_i^1| \vee |a_i^2 - b_i^2|),$$

其中 D 是 $F_0(R)$ 上的距离, 特别地当 $\tilde{B} = 0$, $\tilde{A}$ 的积分定义为: $D(\tilde{A}) = \bigvee_{i=1}^n (|a_i^1| \vee |a_i^2|)$.

引理 1 令 $\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \tilde{A}_3, \tilde{B}_k, \tilde{C}_k \in F_\alpha^n(R)$, $k=1, \dots, n$. 对 $n \in N$, 如下性质成立^[7]:

(1) $D((\tilde{A}_1, \tilde{A}_2), (\tilde{A}_1, \tilde{A}_3)) \leq \|\tilde{A}_1\| \cdot D(\tilde{A}_2, \tilde{A}_3)$;

(2) $D(\sum_{k=1}^n \tilde{B}_k, \sum_{k=1}^n \tilde{C}_k) \leq \sum_{k=1}^n D(\tilde{B}_k, \tilde{C}_k)$.

3 Choquet 积分和 Choquet 积分模

定义 6 如果 X 是一个非空集合, $B \subseteq P(X)$ 是一个 α -代数, $\mu: B \rightarrow [0, \infty]$ 是一个具有如下性质的非空集函数:

(1) $\mu(\emptyset) = 0$;

(2) $A \subset B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$

那么 μ 称之为 B 上的模糊测度, 而 (X, B, μ) 称之为模糊测度空间.

定义 7 可测函数 $h: X \rightarrow [0, \infty)$ 的 Choquet 积分定义为^[8]

$$\int_0^\infty \mu(h(\alpha)) d\alpha$$

其中 $h^*(\alpha) = \{x | h(x) \geq \alpha\}$, $\forall \alpha \in [0, \infty)$.

令 (X, B, μ) 为模糊测度空间, $S(x) = \sum_{i=1}^n (a_i - a_{i-1}) \chi_{A_i(x)}$ 是 X 的非空简单函数, $S(x)$ 的 Choquet 积分定义为

$$(C) \int S(x) d\mu = \sum_{i=1}^n (a_i - a_{i-1}) \mu(A_i)$$

其中 $\chi_{A_i(x)}$ 是 A 的特征函数.

将所有有界模糊值函数集合记为 $L(T, B_T, \mu) = \{F | F: T \rightarrow F_0^*(R)\}$. 对模糊值函数 $F_1, F_2 \in L(T, B_T, \mu)$, $D(F_1, F_2)$ 是模糊测度空间 (T, B_T, μ) 上的可测函数. $D(F_1, F_2)$ 的 Choquet 积分记为 $\Delta(F_1, F_2)$, 定义为:

$$\Delta(F_1, F_2) = (C) \int_T D(F_1, F_2) \circ d\mu.$$

定义 8 令 f 和 g 是 X 上的扩展实值函数, $A \subset X$, 如果对 A 上的每个模式 (x, x') , $f(x) < f(x') \Rightarrow g(x) < g(x')$, 那么我们说 f 和 g 在 A 上是相容的. 如果 $A = X$, 则称 f 和 g 是相容的, 记作 $f \sim g$ ^[9].

引理 2 $(F_0^*(R), D)$ 构成一个完备可分的距离空间^[5].

引理 3 (Lusin's 定理^[10]) 令 (X, B, μ) 为一个自连续的模糊测度空间. 如果 f 是 $E \in B$ 上的一个可测模糊值函数, 那么, 对任意 $\epsilon > 0$, 存在一个紧集 $L \in B$ 使得 f 在 L 上连续并且 $\mu(E - L) < \epsilon$.

引理 4 令每个模式 (f, g) 是 X 上的可测函数, 那么如下的条件彼此等价^[9].

(1) f 与 g 相容, 即 $f \sim g$;

(2) 对 X 上的每个模糊测度 μ , 则

$$(C) \int (f + g) d\mu = (C) \int f d\mu + (C) \int g d\mu.$$

4 折线 FNN 的泛逼近性

本节研究折线 FNN 在有限模糊测度中的 Chonquet 积分模意义下对可测模糊值函数的泛逼近性.

定义 9 假设 $\sigma: R \rightarrow R$ 是一个连续递增的 sigmoid 扩充函数. 一个四层折线 FNN 表示为:

$$\tilde{H}[\sigma] = \begin{cases} T_n: F_\alpha(R) \rightarrow F_\alpha^n(R) | T_n(\tilde{X}) \\ = \sum_{k=1}^q \tilde{A}_k \cdot \sum_{j=1}^l \tilde{V}_{kj} \cdot \sigma(\tilde{U}_k(j) \cdot Z_n(\tilde{X}) + \tilde{\theta}_{kj}), \\ p \in N, \tilde{A}_k, \tilde{V}_{kj}, \tilde{U}_k(j), \tilde{\theta}_{kj} \in F_\alpha^n(R) \end{cases}$$

其中第一层隐含层神经元具有激励函数 σ , 第二层隐含层, 输入和输出层的神经元都是线性的, 输入神经元上有折线算子 $Z_n(\cdot)$. 输入属于模糊数 $F_\alpha(R)$, 输出属于折线模糊数 $F_\alpha^n(R)$. $\tilde{A}_k, \tilde{V}_{kj}, \tilde{U}_k(j), \tilde{\theta}_{kj} \in F_\alpha^n(R)$ 为网络权值.

定义 10 假设模糊函数 $F: F_\alpha(R) \rightarrow F_\alpha^n(R)$, 如果对 $\forall \epsilon > 0$ 和任意给定的紧集 $\mu \in F_\alpha^n(R)$, 存在 $F_m \in \tilde{H}[\sigma]$ 使得 $\forall \tilde{X} \in \mu, D(F_m(\tilde{X}), F(\tilde{X})) < \epsilon$, 那么 $\tilde{Z}[\sigma]$ 称为模糊函数 F 的泛逼近器.

定义 11 令一个具有激励函数 σ 的四层折线 FNN $T_n: F_\alpha(R) \rightarrow F_\alpha^n(R)$, g 为连续函数. 如果

$$T_n(\tilde{X}) = \sum_{k=1}^q \tilde{A}_k \cdot \sum_{j=1}^l \tilde{V}_{kj} \cdot \sigma(\tilde{U}_k(j) \cdot Z_n(\tilde{X}) + \tilde{\theta}_{kj})$$

是函数的 g 泛逼近器, 那么 σ 称为 Tauber-Wiener 函数, 其中 $p \in N, \tilde{A}_k, \tilde{V}_{kj}, \tilde{U}_k(j), \tilde{\theta}_{kj} \in F_\alpha^n(R)$.

引理 5 如果 $F_1, F_2, F_3 \in L(T, B_T, \mu)$, 那么 $\Delta(F_1, F_3) \leq \Delta(F_1, F_2) + \Delta(F_2, F_3)$.

证明:

$$\begin{aligned} \Delta(F_1, F_3) &= (C) \int_T [D(F_1(x), F_3(x))] d\mu \\ &\leq (C) \int_T [D(F_1(x), F_2(x)) + D(F_2(x), F_3(x))] d\mu \\ &\leq (C) \int_T D(F_1(x), F_2(x)) d\mu + (C) \int_T D(F_2(x), F_3(x)) d\mu \\ &\leq \Delta(F_1, F_2) + \Delta(F_2, F_3). \end{aligned}$$

因此 $L((T, B_T, \mu), \Delta)$ 是一个距离空间.

定理 1 如果 $F: T \rightarrow F_0^*(R)$ 且 $\mu(T) < +\infty$, 对任意 $\epsilon > 0$ 存在一个简单可测模糊值函数 $S: T \rightarrow F_0^*(R)$ 使得 $\Delta(F, S) < \epsilon$.

证明: 因为 $(F_0^*(R), D)$ 是一个完备可分的度量空间, 因此对任意 $\tilde{X} \in F_0^*(R), i \in N$, 存在可数个紧

集 $\{\tilde{A}_i, i \in N\}$ 使得 $D(\tilde{X}, \tilde{A}_i) < \varepsilon_0$. 令

$$T_1 = \{x \in T \mid D(F(x), \tilde{A}_1) < \varepsilon\};$$

$$T_2 = \{x \in T \mid D(F(x), \tilde{A}_1) \geq \varepsilon, D(F(x), \tilde{A}_2) < \varepsilon\}, \dots,$$

$$T_n = \{x \in T \mid D(F(x), \tilde{A}_i) \geq \varepsilon, D(F(x), \tilde{A}_n) < \varepsilon, i = 1, \dots, n-1\}$$

其中 $\bigcup_{i \in N} T_i = T, T_i \cap T_j \neq \emptyset (i \neq j), \mu(T) = \mu(\bigcup_{i \in N} T_i) < +\infty$. 那么存在 $d_0 \in N$ 使得 $\mu(\bigcup_{i > d_0} T_i) < \varepsilon_0$. 令 S

$(x) = \sum_{i=0}^{d_0} (a_i - a_{i-1}) \chi_{A_i}(x) (x \in T)$, 其中 $T_0 = \bigcup_{i > d_0} T_i, a_0 = 0, 0 < a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$. $\{T_0, T_1, \dots, T_{d_0}\}$ 是 T 的有限部分, S 是 T 上的简单模糊值函数, 并且

$$\begin{aligned} \Delta(F, S) &= (C) \int_T D(F(x), S(x)) d\mu \\ &= (C) \int_{\bigcup_{i=0}^{d_0} T_i} [D(F(x), S(x))] d\mu \\ &\leq \sum_{i=1}^{d_0} (C) \int_{T_i} [D(F(x), S(x))] d\mu + \\ &\quad (C) \int_{T_0} [D(F(x), S(x))] d\mu \\ &\leq \sum_{i=1}^{d_0} (C) \int_{T_i} [D(F(x), S(x))] d\mu + \varepsilon_0 \\ &\leq \varepsilon_0 [\mu(T) + 1] \end{aligned}$$

令 $\varepsilon \rightarrow 0$, 那么 $\Delta(F, S) \rightarrow 0$, 即对任意 $\varepsilon > 0$, $\Delta(F, S) < \varepsilon$ 成立, 得证.

定理 2 如果 (T, B_T, μ) 是一个有限模糊测度空间, f 和 g 是相容的, 那么有如下性质成立:

(1) 在 Choquet 积分模意义下, $H[\sigma]$ 是 S 的泛逼近器.

(2) 设 $F: T \rightarrow F_0(R)$ 为模糊函数, 那么 $H[\sigma]$ 在 Choquet 积分模意义下能以任意精度逼近 F .

证明: (1) 令 $S(x) = \sum_{k=1}^q (a_k - a_{k-1}) \chi_k(x \in T)$, 其中 $a_0 = 0, 0 < a_1 \leq \dots \leq a_n$. $\chi_{A_i}(x)$ 是一个非负可测函数, 由引理 4 可知, 对任意 $\varepsilon_0 > 0$ 存在一个闭集 $L_k \subseteq T$ 使得 $\mu(T - L_k) \leq \varepsilon_0$ 并且 $\chi_{A_i}(x)$ 在 L_k 上连续. 因此存在一个 Tauber-Wener 函数 $\sigma, t_k \subseteq N, v'_{k1}, v'_{k2}, \dots, v'_{k\kappa_k}, \theta'_{k1}, \theta'_{k2}, \dots, \theta'_{k\kappa_k} \in R, u'_k(1), u'_k(2), \dots, u'_k(t_k) \in R^n$ 使得

$$|\chi_{T_k}(x) - \sum_{j=1}^{t_k} v'_{kj} \cdot \sigma(\langle u'_k(j), x \rangle + \theta'_{kj})| < \varepsilon_0 \quad (x \in L_k).$$

令 $L = \bigcap_{k=1}^q L_k$, 那么 $T = L \cup (T - L)$, 其中

$$\mu(T - L) = \mu(T - \bigcap_{k=1}^q L_k) = \mu(\bigcup_{k=1}^q (T - L_k)) \leq \sum_{k=1}^q \mu(T - L_k)$$

$$\mu(T - L_k).$$

由于 $\mu(T - L_k) < \varepsilon_0$, 因此存在 $\varepsilon_1 > 0$ 使得 $\mu(T - L) < \varepsilon_1$. 假设 $t = \sum_{k=1}^q t_k$, 其中 $k = 1, 2, \dots, q$, 记 $\beta_k =$

$\sum_{r=1}^{k-1} t_r, \beta_1 = 0$. 对 $k = 1, 2, \dots, q, j = 1, 2, \dots, t$, 定义

$$\begin{aligned} v_{kj} &= \begin{cases} v'_{k(j-\beta_k)}, & \beta_k < j \leq \beta_{k+1} \\ 0, & \text{否则} \end{cases} \\ u_k(j) &= \begin{cases} u'_{k(j-\beta_k)}, & \beta_k < j \leq \beta_{k+1} \\ 0, & \text{否则} \end{cases} \\ \theta_{kj} &= \begin{cases} \theta'_{k(j-\beta_k)}, & \beta_k < j \leq \beta_{k+1} \\ 0, & \text{否则} \end{cases} \end{aligned}$$

令 $H(x) = \sum_{k=1}^q \tilde{A}_k \cdot \sum_{j=1}^t v_{kj} \cdot \sigma(\langle u_k(j), x \rangle + \theta_{kj})$, 那么 $H \in H_0[\sigma]$ 且 $\forall k = \{1, 2, \dots, q\}$,

$$\sum_{j=1}^t v_{kj} \cdot \sigma(\langle u_k(j), x \rangle + \theta_{kj}) = \sum_{j=1}^{t_k} v'_{kj} \cdot \sigma(\langle u'_k(j), x \rangle + \theta'_{kj}).$$

$$\Delta(H, S) = (C) \int_T D(H(x), S(x)) d\mu$$

$$= (C) \int_{L \cup (T-L)} D(H(x), S(x)) d\mu$$

$$\leq (C) \int_{L \cup (T-L)} [D(\sum_{k=1}^q \tilde{A}_k \cdot \sum_{j=1}^t v_{kj} \cdot$$

$$\sigma(\langle u_k(j) + \theta_{kj} \rangle), \sum_{k=1}^q (a_k - a_{k-1}) \chi_k)] d\mu$$

$$\leq \sum_{k=1}^q (|\tilde{A}_k| \vee |a_k - a_{k-1}|) \cdot$$

$$((C) \int_{L \cup (T-L)} [D(\sum_{j=1}^t v_{kj} \cdot \sigma(\langle u_k(j) + \theta_{kj} \rangle), \chi_k)] d\mu)$$

$$\leq \sum_{k=1}^q (|\tilde{A}_k| \vee |a_k - a_{k-1}|) \cdot$$

$$((C) \int_L [D(\sum_{j=1}^t v_{kj} \cdot \sigma(\langle u_k(j) + \theta_{kj} \rangle), \chi_k)] d\mu$$

$$+ (C) \int_{T-L} [D(\sum_{j=1}^t v_{kj} \cdot \sigma(\langle u_k(j) + \theta_{kj} \rangle), \chi_k)] d\mu)$$

$$\leq \sum_{k=1}^q (|\tilde{A}_k| \vee |a_k - a_{k-1}|) \cdot ((C) \int_L \varepsilon_0 d\mu +$$

$$(C) \int_{T-L} D(\sum_{j=1}^t v_{kj} \cdot \sigma(\langle u_k(j) + \theta_{kj} \rangle), \chi_k) d\mu$$

对 $\mu(T - L) < \varepsilon_1$, 存在 $\varepsilon_2 > 0$ 使得

$$(C) \int_{T-L} [D(\sum_{j=1}^t v_{kj} \cdot \sigma(\langle u_k(j) + \theta_{kj} \rangle), \chi_k)] d\mu < \varepsilon_2$$

因此

$$\begin{aligned}
\Delta(H, S) &\leq \sum_{k=1}^q (|\tilde{A}_k| \vee |a_k - a_{k-1}|) \cdot \left((C) \int_L \varepsilon_0 d\mu \right. \\
&\quad \left. + (C) \int_{T-L} [D(\sum_{j=1}^t u_{kj} \cdot \sigma(<u_k(j), x> + \theta_{kj}), \chi_k)] d\mu \right) \\
&\leq \sum_{k=1}^q (|\tilde{A}_k| \vee |a_k - a_{k-1}|) \cdot \left((C) \int_L \varepsilon_0 d\mu + \varepsilon_2 \right) \\
&= \sum_{k=1}^q (|\tilde{A}_k| \vee |a_k - a_{k-1}|) \cdot (\varepsilon_0 \cdot \mu(L) + \varepsilon_2)
\end{aligned}$$

即存在 $\varepsilon > 0$ 使得 $\Delta(H, S) < \varepsilon$, 得证.

(2) 我们由定理 1 和结论(1)可以推导出(2).

5 结束语

本文讨论了四层折线 FNN 在 Choquet 积分模意义下的逼近能力, 给出了四层折线 FNN 能够逼近模糊测度空间中的 Choquet 可积模糊函数的充分条件. 由于模糊测度中有多种不同的积分模, 在不同积分模意义下得到的泛逼近性不同, 因此我们将研究折线 FNN 对其他非加性模糊测度空间中的其他可积函数是否构成泛逼近器, 从而为折线 FNN 在非连续可积领域中的应用打下坚实的理论基础.

参考文献:

- [1] Huan Huang, Congxin Wu. Approximation of fuzzy functions by regular fuzzy neural networks[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2011, 77(1): 60-79.
- [2] 赵芬霞, 李洪兴. 正则模糊神经网络在 Sugeno 积分模意义下的泛逼近性[J]. 应用数学学报, 2006, 19(1): 39-45.
- [3] 赵芬霞, 李洪兴. 正则模糊神经网络在积分模意义下的逼近性[J]. 自然科学进展, 2004, 14(9): 1025-1031.
- [4] Jun Li, Shuai Gao, Bin Chen. Approximation of fuzzy

neural networks to fuzzy-valued measurable function [J]. Advances in Intelligent and Soft Computing, 2010 (82): 351-358.

- [5] 刘普寅. 一种新的模糊神经网络及其逼近能力[J]. 中国科学: E 辑, 2002, 32(1): 76-86.
- [6] 何春梅, 叶有培, 李健, 等. 一般输入的折线模糊神经网络对模糊函数的通用逼近[J]. 模式识别与人工智能, 2009, 22(3): 481-487.
- [7] GuiJun Wang, XiaoPing Li. Universal approximation of polygonal fuzzy neural networks in sense of K-integral norms[J]. Science China Information Sciences, 2011, 54(11): 2307-2323.
- [8] Murofushi T, Sugeno M. An interpretation of fuzzy measures and the Choquet integral as an integral with respect to a fuzzy measure[J]. Fuzzy Set and Systems, 1989(129): 201-207.
- [9] Murofushi T, Sugeno M. A Theory of fuzzy measures: representations, the Choquet integral, and null sets[J]. Journal of Mathematical analysis and applications, 1991(159): 532-549.
- [10] Wu Congxin, Ha Minghu. On the regularity of the fuzzy measure on metric fuzzy measure space [J]. Fuzzy Set and Systems, 1994(66): 373-379.

作者简介:



何春梅 女, (1981—), 博士, 讲师. 研究方向为模式识别与人工智能.

(上接第 31 页)

- [3] Li D, Gao J, Satyanarayana A, et al. Huawei technologies Co. Led[S]. China, Shenzhen: RFC5495 Description of the Resource Reservation Protocol-Traffic-Engineered(RSVP-TE) Graceful Restart Procedures, 2009.
- [4] WindRiver Inc.. VxWorks programmer's guide6. 8 [EB/OL]. (2012-06-10). <http://www.windriver.com>.
- [5] Felser M, Kapitza R, Kleinöder J, et al. Dynamic software update of resource-constrained distributed embedded systems[DB/OL]. (2007-07-04). http://www4.informatik.uni-erlangen.de/publications/2007/felser_07_iess.pdf.
- [6] 任向民, 卢惠林. 汇编语言程序设计实用教程[M]. 北

京: 清华大学出版社, 2008.

作者简介:



程友清 女, (1976—), 博士研究生, 高级工程师. 研究方向为 IP 数据网络、嵌入式软件、可信计算.